Examen blanc de Mathématiques
2ème année Baccalauréat - Sciences PC et SVT

Réalisé par Youssef SEMHI
Contact 0644127117 / 0708875223

Exercice 1

Soit (u_n) une suite numérique définie comme suit :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 6 - \frac{7}{2+u_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(5-u_n)(1+u_n)}{2+u_n},$$

   puis en déduire que la suite (u_n) est décroissante.

   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. On considère (v_n) la suite numérique définie par :

$$v_n = \frac{u_n - 5}{u_n + 1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{7}$.

   (b) Déterminer v_n en fonction de n, puis en déduire u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (c) Calculer $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ en fonction de n.

   (d) Calculer la limite $\lim_{n\to\infty} S_n$.

Exercice 2

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(z+8i)(z^2 - 4\sqrt{3}z + 16) = 0.$$

2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = 2\sqrt{3} - 2i \quad \text{et} \quad b = 2\sqrt{3} + 2i \quad \text{et} \quad c = -8i$$

   (a) Écrire a et b sous forme exponentielle.

   (b) Montrer que l'affixe du point D, image de C par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, est :

$$d = 4\sqrt{3} + 4i$$

   (c) Déterminer l'affixe du point E, image de A par l'homothétie h de centre O et de rapport $\frac{2}{3}$.
3. (a) Montrer que :

$$\frac{a-d}{a} = -\sqrt{3}i$$

   (b) En déduire que le triangle OAD est rectangle en A.

Exercice 3

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(0;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points :

$$A(1;0;1) \quad ; \quad B(1;-1;0) \quad ; \quad C(3;1;1)$$

1. a) Montrer que :
$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}.$$
   b) En déduire que $x - 2y + 2z - 3 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Soit (S) la sphère de centre $\Omega(2;-1;1)$ et de rayon $R = 1$. Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S).
3. a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point Ω et orthogonale au plan (ABC).
   b) Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point H à déterminer.
4. Soit le plan (Q) d'équation cartésienne :
$$2x + y - 3z + 1 = 0$$
   a) Montrer que les plans (ABC) et (Q) se coupent suivant une droite (D).
   b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D).

Exercice 4

Soit l'urne suivante :

3 boules rouges de numéros 1, 2, 3

3 boules jaunes de numéros 1, 2, 2

2 boules bleues de numéros 1, 2

Les boules sont indiscernables au toucher.

Partie 1

On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne. On considère les événements suivants :

A : Obtenir deux boules de même couleur

B : Obtenir une boule jaune au premier tirage et une boule bleue au deuxième

C : Obtenir deux boules portant le même numéro

Calculer : $p(A)$, $p(B)$ et $p(C)$.

Partie 2

On tire simultanément trois boules de l'urne. On considère les événements suivants :

D : Obtenir 3 boules portant le même numéro

E : Obtenir 3 boules portant des numéros différents

F : Obtenir 3 boules portant des numéros deux à deux différents

Calculer : $p(D)$, $p(E)$ et $p(F)$.

1) Calculer : $p(D)$, $p(E)$ et $p(F)$.
2) On considère la variable aléatoire X qui à tout tirage fait associer le plus grand numéro apparu
   a) Vérifier que $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$
   b) Donner la loi de probabilité de X
   c) Calculer l'espérance $E(X)$, la variance $V(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$
3) On répète l'expérience précédente six fois avec remise dans l'urne des trois boules triées après chaque tirage. Calculer la probabilité de réaliser l'événement D quatre fois exactement

Problème :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 2 - x + x\ln(2x-3); & x \geq 2 \\ f(x) = -x + 1 + e^{x-2}; & x < 2 \end{cases}$$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (unité 2cm)

1. Montrer que f est continue en $x = 2$.
2. a) Vérifier que

$$\frac{f(x)}{x-2} = -1 + 2x \times \frac{\ln[1 + 2(x-2)]}{2(x-2)} \quad \text{pour tout } x \in [2; +\infty],$$

   b) Vérifier que

$$\frac{f(x)}{x-2} = -1 + \frac{e^{x-2} - 1}{x-2} \quad \text{pour tout } x \in]-\infty; 2]$$

   c) Étudier la dérivabilité de f en $x = 2$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
3. a) Montrer que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

   b) Montrer que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty, \quad \text{puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.}$$

4. a) Montrer que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

   b) Montrer que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) + x - 1 = 0, \quad \text{puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.}$$

   c) Étudier la position relative de (C_f) et la droite (D) d'équation $y = x - 1$.
5. a) Montrer que :

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{3}{2x-3} + \ln(2x-3); & x \geq 2 \\ f'(x) = -1 + e^{x-2}; & x < 2 \end{cases}$$

b) Montrer que

$$\frac{3}{2x-3}+\ln(2x-3)>0 \quad \text{pour tout } x\in[2;+\infty[\quad \text{et } -1+e^{x-2}<0 \quad \text{pour tout } x\in]-\infty;2[.$$

c) En déduire que f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty;2[$ et croissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$.

d) Dresser le tableau de variation de f.

6. Construire (C_f) et la droite (D) dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

7. a) Montrer que $I=\int_0^2 e^{x-2}\,dx=\frac{e^2-1}{e^2}$.

   b) Calculer en cm^2, l'aire du domaine plan limité par (C_f), l'axe des abscisses et les droites $x=0$ et $x=2$ d'équations : $x=0$ et $x=2$.

Correction

Corrige exercice 1 :

1)

Initialisation : Pour $n=0$, $u_0=1$ vérifie trivialement $1\leq 1\leq 5$.

Hérédité : Supposons $1\leq u_k\leq 5$ pour un certain $k\in\mathbb{N}$.

Montrons que $u_{k+1}\geq 1$:

$$u_{k+1}-1=5-\frac{7}{2+u_k}.$$

Comme $u_k\leq 5$, on a $2+u_k\leq 7$, donc :

$$\frac{7}{2+u_k}\geq 1 \implies 5-\frac{7}{2+u_k}\geq 4>0.$$

Ainsi, $u_{k+1}>1$.

Montrons que $u_{k+1}\leq 5$:

$$u_{k+1}-5=1-\frac{7}{2+u_k}.$$

Comme $u_k\geq 1$, on a $2+u_k\geq 3$, donc :

$$\frac{7}{2+u_k}\geq 1 \implies 1-\frac{7}{2+u_k}\leq 0.$$

Ainsi, $u_{k+1}\leq 5$.

Conclusion : Par récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}, 1\leq u_n\leq 5$.

2)

a) $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \left(6 - \frac{7}{2+u_n}\right) - u_n \\
&= 6 - u_n - \frac{7}{2+u_n} \\
&= \frac{(6-u_n)(2+u_n) - 7}{2+u_n} \\
&= \frac{12 + 6u_n - 2u_n - u_n^2 - 7}{2+u_n} \\
&= \frac{5 + 4u_n - u_n^2}{2+u_n} \\
&= \frac{(5-u_n)(u_n+1)}{2+u_n}
\end{aligned}$$

Démontrons que la suite (u_n) est décroissante :

D'après la question 1, on sait que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 5$. Analysons le signe de $u_{n+1} - u_n$:

$u_n - 5 \leq 0$ (car $u_n \leq 5$)

$1 + u_n > 0$ (car $u_n \geq 1$)

$2 + u_n \geq 3 > 0$

Ainsi :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 5)(1 - u_n)}{2 + u_n} \geq 0$$

Donc la suite est **décroissante**.

b) La suite (u_n) étant décroissante et majorée par 5, elle est convergente.

3)

a) Par définition : $v_n = \dfrac{u_n - 5}{u_n + 1}$

Calculons v_{n+1} en fonction de v_n :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-5}{u_{n+1}+1} \\
&= \frac{\left(6-\dfrac{7}{2+u_n}\right)-5}{\left(6-\dfrac{7}{2+u_n}\right)+1} \\
&= \frac{1-\dfrac{7}{2+u_n}}{7-\dfrac{7}{2+u_n}} \\
&= \frac{\dfrac{2+u_n-7}{2+u_n}}{\dfrac{7(2+u_n)-7}{2+u_n}} \\
&= \frac{u_n-5}{7u_n+7} \\
&= \frac{u_n-5}{7(u_n+1)} \\
&= \frac{1}{7}\cdot\frac{u_n-5}{u_n+1} \\
&= \frac{1}{7}v_n
\end{aligned}$$

Donc v_n est une suite geometrique de raison de $\frac{1}{7}$.

b) Expression de v_n et u_n

Suite géométrique : $v_n = v_0\left(\dfrac{1}{7}\right)^n$

Calcul de v_0 : $v_0 = \dfrac{u_0-5}{u_0+1} = \dfrac{1-5}{1+1} = -2$

Donc : $v_n = -2\left(\dfrac{1}{7}\right)^n$

Exprimons u_n en fonction de v_n :

$$\begin{aligned}
v_n = \frac{u_n-5}{u_n+1} &\Rightarrow v_n(u_n+1) = u_n-5 \\
&\Rightarrow v_nu_n+v_n = u_n-5 \\
&\Rightarrow u_n(v_n-1) = -5-v_n \\
&\Rightarrow u_n = \frac{5+v_n}{1-v_n}
\end{aligned}$$

En substituant v_n :

$$u_n = \frac{5-2\left(\frac{1}{7}\right)^n}{1+2\left(\frac{1}{7}\right)^n}$$

c) Calcul de S_n

Somme des termes d'une suite géométrique :

$$\begin{aligned} S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n &= v_0 \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \\ &= -2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{7}} \\ &= -2 \cdot \frac{7}{6} \left(1 - \frac{1}{7^{n+1}}\right) \\ &= -\frac{7}{3} \left(1 - \frac{1}{7^{n+1}}\right) \end{aligned}$$

d) Limite de S_n

Comme $\left|\frac{1}{7}\right| < 1$, $\left(\frac{1}{7}\right)^{n+1} \to 0$ quand $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = -\frac{7}{3}(1 - 0) = -\frac{7}{3}$$

Corrige exercice 2 :

1. **Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation :**

$$(z + 8i)(z^2 - 4\sqrt{3}z + 16) = 0$$

Première solution :

$$z + 8i = 0 \implies z = -8i$$

Solutions de $z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0$: Calcul du discriminant :

$$\Delta = (4\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 16 = 48 - 64 = -16 = (4i)^2$$

Racines :

$$z = \frac{4\sqrt{3} \pm 4i}{2} = 2\sqrt{3} \pm 2i$$

Solution finale : Les solutions sont $z_1 = -8i$, $z_2 = 2\sqrt{3} + 2i$, $z_3 = 2\sqrt{3} - 2i$.

2. **Points dans le plan complexe :**

$$a = 2\sqrt{3} - 2i, \quad b = 2\sqrt{3} + 2i, \quad c = -8i$$

(a) **Forme exponentielle de a et b :**

Pour $a = 2\sqrt{3} - 2i$:

Module : $|a| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4$

Argument : $a = |a| \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = 4 \left(\cos\frac{\pi}{6} - i \sin\frac{\pi}{6}\right)$

$$a = 4\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i \sin\frac{-\pi}{6}\right)$$

$$\arg a = \frac{-\pi}{6}$$

Forme exponentielle : $a = 4e^{-i\pi/6}$

Pour $b = 2\sqrt{3} + 2i$:

Module : $|b| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2)^2} = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4$

Argument : $b = |b|\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$$\arg b = \frac{\pi}{6}$$

Forme exponentielle : $b = 4e^{i\pi/6}$

(b) **Affixe de D image de C par rotation :**
La rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ donne :

$$d = c \cdot e^{i2\pi/3} = -8i\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$d = -8i\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4i - 4\sqrt{3}i^2 = 4i + 4\sqrt{3}$$

$$d = 4\sqrt{3} + 4i$$

(c) **Affixe de E image de A par homothétie :**
Homothétie de centre O et rapport $\frac{2}{3}$:

$$e = \frac{2}{3}a = \frac{2}{3}(2\sqrt{3} - 2i) = \frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{4i}{3}$$

3.

(a) **Calcul de $\frac{a-d}{a}$:**

$$a - d = (2\sqrt{3} - 2i) - (4\sqrt{3} + 4i) = -2\sqrt{3} - 6i$$

$$\frac{a-d}{a} = \frac{-2\sqrt{3} - 6i}{2\sqrt{3} - 2i} = \frac{(-2\sqrt{3} - 6i)(2\sqrt{3} + 2i)}{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2}$$

$$Num\acute{e}rateur = -12 - 4\sqrt{3}i - 12\sqrt{3}i + 12 = -16\sqrt{3}i$$

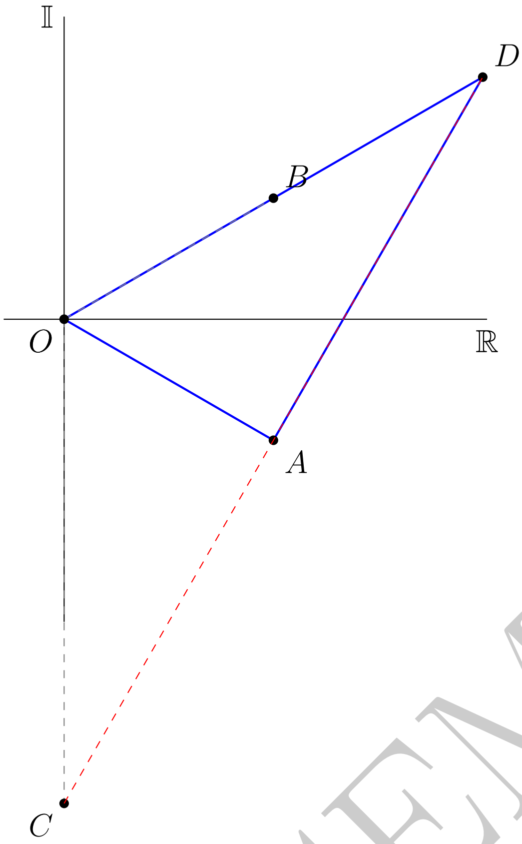
$$D\acute{e}nominateur = 12 + 4 = 16$$

$$\frac{a-d}{a} = \frac{-16\sqrt{3}i}{16} = -\sqrt{3}i$$

(b) **On a :**

$$\arg\left(\frac{a-d}{a}\right) = \arg(-\sqrt{3}i) = -\frac{\pi}{2}$$

Par conséquent, les vecteurs $\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux, ce qui prouve que le triangle OAD est rectangle en A.



Corrige exercice 3 :

1) a) Calcul du produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

Coordonnées des vecteurs :

$$\overrightarrow{AB}(1-1;-1-0;0-1)$$

$$\overrightarrow{AB}(0;-1;-1)$$

$$\overrightarrow{AC}(3-1;1-0;1-1)$$

$$\overrightarrow{AC}(2;1;0)$$

Calcul du produit vectoriel :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}((-1)(0)-(-1)(1)) - \vec{j}((0)(0)-(-1)(2)) + \vec{k}((0)(1)-(-1)(2))$$

$$= \vec{i}(0+1) - \vec{j}(0+2) + \vec{k}(0+2) = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

Conclusion :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}}$$

b) Équation cartésienne du plan (ABC)

Vecteur normal au plan : D'après la question précédente, $\vec{n} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ est normal au plan (ABC).

Équation du plan : Le plan passant par $A(1;0;1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1;-2;2)$ a pour équation :

$$1(x-1) - 2(y-0) + 2(z-1) = 0$$
$$\Rightarrow x - 1 - 2y + 2z - 2 = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{x - 2y + 2z - 3 = 0}$$

2) Équation cartésienne de la sphère (S)

Centre $\Omega(2;-1;1)$ et rayon $R = 1$: L'équation de la sphère est :

$$\begin{aligned}(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 &= 1^2\\ (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) + (z^2 - 2z + 1) &= 1\\ x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z + 4 + 1 + 1 &= 1\\ x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z + 6 &= 1\\ x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z + 5 &= 0\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z + 5 = 0}$$

3) a) Représentation paramétrique de la droite (Δ)

Vecteur directeur : (Δ) est orthogonale à (ABC), donc elle admet $\vec{n}(1;-2;2)$ comme vecteur directeur.

Passage par $\Omega(2;-1;1)$: La représentation paramétrique est :

$$(\Delta) : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{(\Delta) : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}}$$

3) b) Tangence du plan (ABC) à la sphère (S)

Point de contact H : H est l'intersection de (Δ) et (ABC). Donc substitue les équations paramétriques de (Δ) dans l'équation de (ABC) :

$$(2+t) - 2(-1-2t) + 2(1+2t) - 3 = 0$$

$$2 + t + 2 + 4t + 2 + 4t - 3 = 0 \Rightarrow 9t + 3 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{3}$$

$$H\left(2 - \frac{1}{3}; -1 - 2\left(-\frac{1}{3}\right); 1 + 2\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \left(\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$$

$$\boxed{H\left(\frac{5}{3};-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)}$$

Vérification de la tangence : La distance de Ω à (ABC) est :

$$d=\frac{|2-2(-1)+2(1)-3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{|2+2+2-3|}{3}=\frac{3}{3}=1=R$$

Donc (ABC) est tangent à (S) en H.

4) a) Intersection des plans (ABC) et (Q)

Les vecteurs normaux $\vec{n_1}=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{n_2}=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires.

Le système $\begin{cases}x-2y+2z=3\\2x+y-3z=-1\end{cases}$ est de dimention 2 avec 3 inconnues, donc l'intersection est une droite.

b) Représentation paramétrique de (D)

Équations des plans :

$$(ABC): x-2y+2z-3=0$$
$$(Q): 2x+y-3z+1=0$$

Résolution du système : On exprime x en fonction de y et z :

$$\begin{cases}x=2y-2z+3\\2(2y-2z+3)+y-3z+1=0\end{cases}$$

$$4y-4z+6+y-3z+1=0\Rightarrow 5y-7z+7=0\Rightarrow y=\frac{7z-7}{5}$$

En posant $z=5t$, on obtient :

$$y=\frac{7(5t)-7}{5}=7t-\frac{7}{5},\quad x=2\left(7t-\frac{7}{5}\right)-2(5t)+3=14t-\frac{14}{5}-10t+3=4t+\frac{1}{5}$$

$$\boxed{(D):\begin{cases}x=\frac{1}{5}+4t\\y=-\frac{7}{5}+7t\\z=5t\end{cases}\quad,\quad t\in\mathbb{R}}$$

Corrige exercice 4 :

Partie 1 (Tirages successifs sans remise)

Nombre total de tirages : $A_8^2=8\times7=56$

Calcul de $p(A)$: même couleur

Cas favorables :

Rouges : $A_3^2 = 6$

Jaunes : $A_3^2 = 6$

Bleues : $A_2^2 = 2$

$$p(A) = \frac{14}{56} = \frac{1}{4}$$

Calcul de $p(B)$: Jaune puis Bleue

$$\begin{aligned} p(B) &= \frac{\text{Nombre de cas (Jaune puis Bleue)}}{A_8^2} \\ &= \frac{3 \times 2}{56} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28} \end{aligned}$$

Calcul de $p(C)$: même numéro

Cas favorables :

Numéro 1 : $A_3^2 = 6$

Numéro 2 : $A_4^2 = 12$

Numéro 3 : 0 (seulement 1 boule)

Total : $6 + 12 = 18$
$p(C) = \frac{18}{56} = \frac{9}{28}$

Partie 2 (Tirage simultané)

Nombre total de combinaisons : $C_8^3 = 56$

1)

Calcul de $p(D)$: 3 mêmes numéros

Uniquement possible avec 3 numéros 1 : $C_3^3 = 1$
$p(D) = \frac{1}{56}$

Calcul de $p(E)$: 3 numéros différents

Combinaisons (1,2,3) :

$$\begin{aligned} \text{Cas favorables} &= C_3^1 \times C_4^1 \times C_1^1 \\ &= 3 \times 4 \times 1 = 12 \end{aligned}$$

$$p(E) = \frac{12}{56} = \frac{3}{14}$$

Calcul de $p(F)$: numéros deux à deux différents

Équivalent à $p(E)$ pour 3 boules
$p(F) = \frac{3}{14}$

2)

a) Vérification que $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$

$X = 1$: possible (1,1,1)
$X = 2$: possible (1,1,2)
$X = 3$: possible (...,3)

b) Loi de probabilité

$$P(X = 1) = \frac{C_3^3}{56} = \frac{1}{56}$$
$$P(X = 3) = \frac{C_1^1 . C_7^2}{56} = \frac{21}{56}$$
$$P(X = 2) = 1 - P(X = 1) - P(X = 3) = 1 - \frac{1}{56} - \frac{21}{56} = \frac{34}{56}$$

c) Espérance $E(X)$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{3} k \cdot P(X = k) = 1 \cdot \frac{1}{56} + 2 \cdot \frac{17}{28} + 3 \cdot \frac{3}{8}$$
$$= \frac{1}{56} + \frac{34}{28} + \frac{9}{8} = \frac{1}{56} + \frac{68}{56} + \frac{63}{56} = \frac{132}{56} = \frac{33}{14} \approx 2.357$$

Variance $V(X)$

D'abord calculer $E(X^2)$:

$$E(X^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{56} + 2^2 \cdot \frac{17}{28} + 3^2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{56} + \frac{68}{28} + \frac{27}{8}$$
$$= \frac{1}{56} + \frac{136}{56} + \frac{189}{56} = \frac{326}{56} = \frac{163}{28}$$

Puis :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{163}{28} - \left(\frac{33}{14}\right)^2 = \frac{163}{28} - \frac{1089}{196}$$
$$= \frac{1141}{196} - \frac{1089}{196} = \frac{52}{196} = \frac{13}{49} \approx 0.265$$

Écart-type $\sigma(X)$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{13}{49}} = \frac{\sqrt{13}}{7} \approx 0.515$$

3)

Rappel de $P(D)$

$$P(D) = \frac{1}{56} \quad \text{(obtenir 3 boules de même numéro)}$$

Calcul de $P(Y = 4)$

$$P(Y = 4) = \binom{6}{4} \left(\frac{1}{56}\right)^4 \left(\frac{55}{56}\right)^2$$
$$= 15 \cdot \frac{1}{9834496} \cdot \frac{3025}{3136} = \frac{15 \times 3025}{9834496 \times 3136} \approx 1.47 \times 10^{-6}$$

Corrige Probleme :

1) Continuité de f en $x = 2$

Pour montrer que f est continue en $x = 2$, on vérifie que :

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$$

Calcul de $f(2)$:

$$f(2) = 2 - 2 + 2\ln(4 - 3) = 0 + 2\ln(1) = 0$$

Limite à gauche ($x \to 2^-$) :

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (-x + 1 + e^{x-2}) = -2 + 1 + e^0 = -1 + 1 = 0$$

Limite à droite ($x \to 2^+$) :

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (2 - x + x\ln(2x - 3)) = 0 + 2\ln(1) = 0$$

Conclusion : Les limites à gauche et à droite sont égales à $f(2) = 0$, donc f est continue en $x = 2$.

2) Dérivabilité de f en $x = 2$

a) **on a pour $x \geq 2$:**

$$\frac{f(x)}{x - 2} = \frac{2 - x + x\ln(2x - 3)}{x - 2} = -1 + \frac{x\ln(2x - 3)}{x - 2}$$

Donc :

$$\frac{f(x)}{x - 2} = -1 + 2x \times \frac{\ln[1 + 2(x - 2)]}{2(x - 2)}$$

b) **on a pour $x < 2$:**

$$\frac{f(x)}{x - 2} = \frac{-x + 1 + e^{x-2}}{x - 2} = -1 + \frac{e^{x-2} - 1}{x - 2}$$

c) **Dérivabilité en $x = 2$:**

— **Dérivée à gauche :**

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \left(-1 + \frac{e^{x-2} - 1}{x - 2}\right) = \lim_{X \to 0^-} \left(-1 + \frac{e^X - 1}{X}\right) = -1 + 1 = 0$$

(avec $X = x - 2$).

Interpretation : Cf admet un demi-tangent horizontale à gauche au point $x_0 = 2$.

— **Dérivée à droite :**

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \left(-1 + 2x \times \frac{\ln(1+2(x-2))}{2(x-2)}\right) = \lim_{X\to 0^+} \left(-1 + 2(X+2)\frac{\ln(1+X)}{X}\right)$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = -1 + 2\times 2 = 3$$

(avec $X = 2(x-2)$).

Interpretation : Cf admet un demi-tangent d'eqauetion $y = f(2) + f'_d(2)(x-2) = 0 + 3\cdot(x-2) = 3x-6$.

Conclusion : $f'_g(2) \neq f'_d(2)$, donc f n'est pas dérivable en $x = 2$.

3)

a) **Limite en $+\infty$:** Pour $x \geq 2$:

$$f(x) = 2 - x + x\ln(2x-3)$$

On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(2x-3) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} x\ln(2x-3) = +\infty$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

b) **Limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$:**

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{2}{x} - 1 + \ln(2x-3)$$

On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \ln(2x-3) = +\infty$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

Interprétation : La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$.

4)

a) Limite de $f(x)$ en $-\infty$

Pour $x < 2$, la fonction est définie par :

$$f(x) = -x + 1 + e^{x-2}$$

Calculons la limite :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-x + 1 + e^{x-2})$$

on a :

— $\lim_{x\to-\infty} -x = +\infty$ (car $-x \to +\infty$ quand $x \to -\infty$)

— $\lim_{x\to-\infty} e^{x-2} = 0$ (l'exponentielle tend vers 0 en $-\infty$)

Conclusion :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

b) Limite de $f(x)+x-1$ en $-\infty$

On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x-1] &= \lim_{x\to-\infty}[(-x+1+e^{x-2})+x-1] \\ &= \lim_{x\to-\infty} e^{x-2} = 0\end{aligned}$$

Interprétation : La droite (D) d'équation $y=-x+1$ est une **asymptote oblique** à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$

c) Position relative de (C_f) et (D)

Étudions le signe de :

$$f(x)-(-x+1)=e^{x-2}$$

on a :

$e^{x-2}>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Donc $f(x)>-x+1$ pour tout $x<2$

Conclusion :

La courbe (C_f) est toujours **au-dessus** de la droite (D) pour $x<2$

5)

a) Calcul de la dérivée $f'(x)$

Pour $x\geq 2$:

$$f(x)=2-x+x\ln(2x-3)$$

Dérivons terme à terme :

$$\begin{aligned}f'(x) &= 0-1+\ln(2x-3)+x\cdot\frac{2}{2x-3} \\ &= -1+\ln(2x-3)+\frac{2x}{2x-3}\end{aligned}$$

Simplifions le dernier terme :

$$\frac{2x}{2x-3}=\frac{(2x-3)+3}{2x-3}=1+\frac{3}{2x-3}$$

Donc :

$$f'(x)=-1+\ln(2x-3)+1+\frac{3}{2x-3}=\ln(2x-3)+\frac{3}{2x-3}$$

Pour $x<2$:

$$f(x)=-x+1+e^{x-2}$$

Dérivons directement :

$$f'(x)=-1+e^{x-2}$$

b)

Sur $[2, +\infty[$ **:** Montrons que :

$$\frac{3}{2x-3} + \ln(2x-3) > 0 \quad \forall x \geq 2$$

on a :

Pour $x = 2$: $\frac{3}{1} + \ln(1) = 3 > 0$

Pour $x > 2$:

$\frac{3}{2x-3} > 0$ (car $2x - 3 > 0$)
$\ln(2x-3) > \ln(1) = 0$ (car $2x - 3 > 1$ pour $x > 2$)

Sur $]-\infty, 2[$ **:** Montrons que :

$$-1 + e^{x-2} < 0 \quad \forall x < 2$$

On a :

$x < 2 \Rightarrow x - 2 < 0 \Rightarrow e^{x-2} < e^0 = 1$

Donc $-1 + e^{x-2} < -1 + 1 = 0$

c) Variations de f

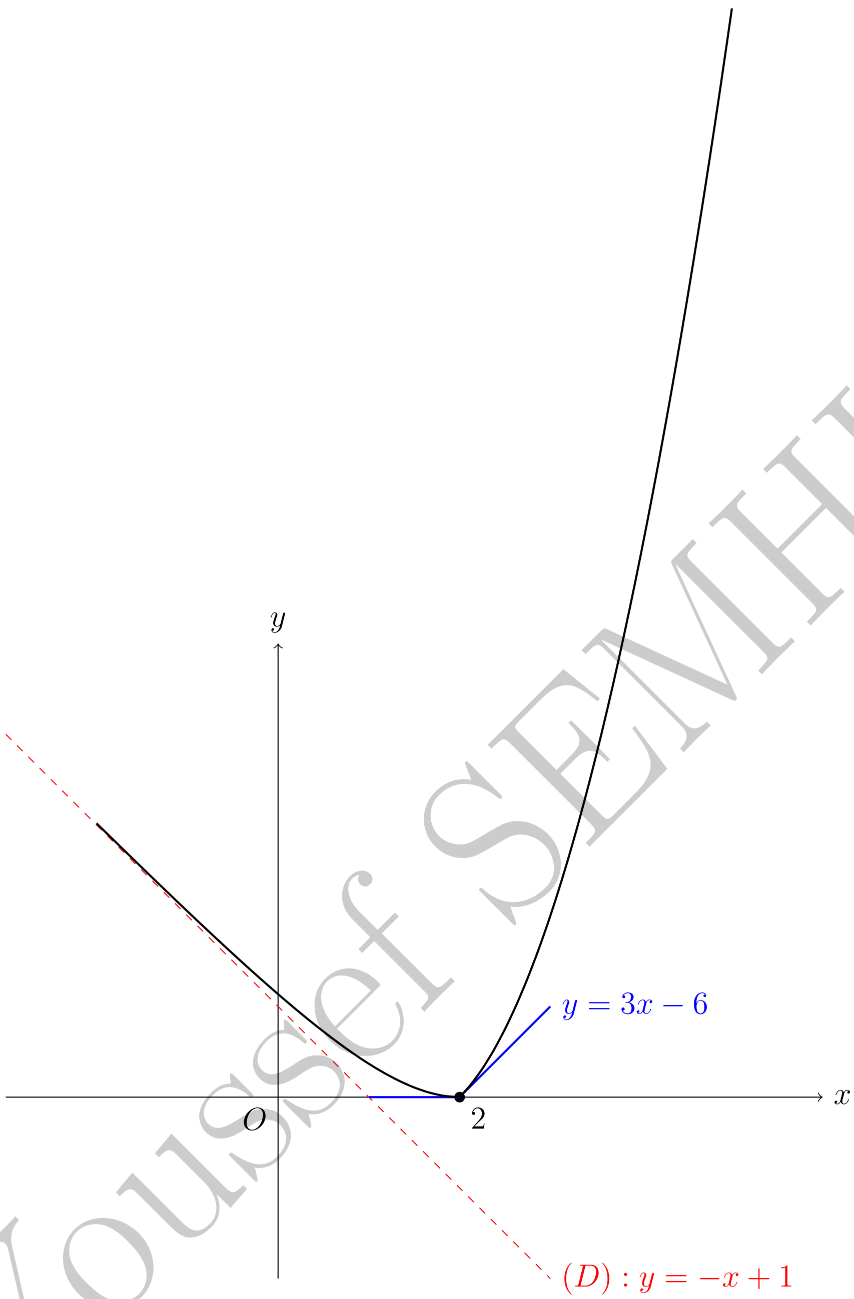
Sur $]-\infty, 2[$: $f'(x) < 0$ donc f est **strictement décroissante**

Sur $[2, +\infty[$: $f'(x) > 0$ donc f est **strictement croissante**

d) Tableau de variations

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(2) = 0$	$\nearrow$	$+\infty$

6)



7)

a) Calcul de l'intégrale $I = \int_0^2 e^{x-2}\,dx$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 e^{x-2}\,dx \\ &= \left[e^{x-2}\right]_0^2 \quad \text{(car une primitive de } e^{x-2} \text{ est } e^{x-2}\text{)} \\ &= e^{2-2} - e^{0-2} \\ &= e^0 - e^{-2} \\ &= 1 - \frac{1}{e^2} \\ &= \frac{e^2-1}{e^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{I = \frac{e^2-1}{e^2}}$$

b) Calcul de l'aire en cm^2

Position relative : On vérifie d'abord que $f(x) \geq 0$ sur $[0, 2]$:

$$f(x) - 0 = e^{x-2} - (x-1)$$

En $x = 0$: $e^{-2} + 1 > 0$
En $x = 1$: $e^{-1} > 0$
En $x = 2$: $0 = 0$
La dérivée $f'(x) = -1 + e^{x-2} < 0$ sur $[0, 2]$ (car $x - 2 \leq 0$)

Donc f est positive et décroissante sur $[0, 2]$.

Calcul de l'aire :

$$\mathcal{A} = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 (-x + 1 + e^{x-2})\,dx$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= -\int_0^2 x\,dx + \int_0^2 1\,dx + \int_0^2 e^{x-2}\,dx \\ &= -\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + [x]_0^2 + I \\ &= -\frac{4}{2} + 2 + \frac{e^2-1}{e^2} \\ &= -2 + 2 + \frac{e^2-1}{e^2} \\ &= \frac{e^2-1}{e^2} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \text{Aire réelle} &= \frac{e^2-1}{e^2} \times (2\,\text{cm})^2 \\ &= \frac{e^2-1}{e^2} \times 4\,\text{cm}^2 \end{aligned}$$